S E S ‘ 2 0 0 5

Scientific Conference “SPACE, ECOLOGY, SAFETY” with International Participation

10–13 June 2005, Varna, Bulgaria

УРАВНЕНИЕ ЗА ТЕМПЕРАТУРАТА ВЪРХУ УДАРНАТА АДИАБАТА НА ТВЪРДО ТЯЛО

Валентин В. Господинов

Институт за космически изследвания – БАН

1000 София, П.К. 799

Ключови думи: диференциално уравнение, температура на Хюгонио, твърдо тяло

***Резюме**. В настоящата работа е получено диференциално уравнение за температурата върху ударната адиабата на твърдо тяло. Уравнението е решено в квадратури.Полученото решение дава допълнителна информация за термодинамичните свойства на материята при високи температури и налягания. Освен това то има и практическа стойност --- може да се използва при оптимизацията на режимите на взривна обработка на материали и при получаване на нови материали в условията на взривно въздействие.*

Динамичното въздействие върху кондензирани среди представлява значителен научен интерес. То води до необратимо нагряване на средата и нарастване на ентропиятя ѝ. Нагряването на дадена среда се определя от нейната свиваемост. Експерименталното изследване на динамично въздействие върху едно и също вещество при различни начални плътности дава значително по-пълна информация за термодинамичните свойства на веществото в широк диапазон от температури и налягания. Така е възможно да се изследват недостижими по друг начин области от фазовата диаграма на материята.

Докато налягането и плътността, характеризиращи получените при динамично въздействие термодинамични състояния могат да се определят лесно от законите за съхранение и измерените стойности на масовата и вълновата скорост [1], то експерименталното определяне на температурата е свързано със значителни трудности, а получените резултати са противоречиви. Изключение правят само някои прозрачни материали [2]. Един алтернативен подход е температурата да се пресметне в рамките на термодинамиката.

В настоящата работа с помощта на термодинамичния подход е изведено диференциално уравнение за температурата върху ударната адиабата на твърдо тяло. Получено е аналитично решение.

За да получим уравнение за температурата върху ударната адиабата ще използваме основното уравнение на термодинамиката във вида

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E + P\mathrm{d}V.$$

Да разгледаме S и E като функции на V и T --- $S = S(V,T)$ и $E = E(V,T)$ и да пресметнем техните диференциали $\mathrm{d}S$ и $\mathrm{d}E$:

$$\mathrm{d}E = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T.$$

За $T\mathrm{d}S$ получаваме

$$T\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right]\mathrm{d}V.$$

По дефиниция производната $(\partial E/\partial T)_V$ е специфичната топлина при постоянен обем C_V .

Да запишем в развит вид и диференциала $\mathrm{d}S(V,T)$

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$$

и да заместим в ур.(2). Получаваме

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right]\mathrm{d}V$$

или

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right]\mathrm{d}V.$$

След като приравним в последното уравнение производните пред диференциалите на $\mathrm{d}T$ и $\mathrm{d}V$ можем да запишем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right].$$

Тъй като стойността на смесената производна $(\partial^2 S/\partial T\partial V)$ не зависи от реда на диференциране, то

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right]_T = \frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right]_V.$$

Да заместим в последното уравнение $(\partial S/\partial T)_V$ и $(\partial S/\partial V)_T$ с техните равни от ур.(3):

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V\right]_T = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right]\right\}_V.$$

След като извършим диференцирането и направим приведение получаваме

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - \frac{1}{T^2}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right] = 0 \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P.$$

След като заместим с получения израз в ур.(2) то приема вида

$$T\mathrm{d}S = C_V\mathrm{d}T + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V.$$

Термодинамичната дефиниция на параметъра на Грюнайзен е $\gamma = V(\partial P/\partial E)_V$.
Производната $(\partial P/\partial T)_V$ може да се преобразува така

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V,$$

откъдето $(\partial P/\partial T)_V = C_V(\gamma/V)$. След всички тези преобразувания ур.(1) приема вида

$$T\mathrm{d}S = C_V \mathrm{d}T + C_V \left(\frac{\gamma}{V}\right) T\mathrm{d}V.$$

В съответствие с приетото предположение за наличие на термодинамично равновесие зад фронта на ударната вълна можем да заместим в основното уравнение на термодинамиката (ур.(1)) с дясната страна на уравнението на Хюгонио за енергията [1,ур.(2.9)]. Получаваме

$$T\mathrm{d}S = \frac{1}{2}(V_0 - V)\mathrm{d}P + \frac{1}{2}P\mathrm{d}P.$$

След като приравним десните страни на уравнения (4) и (5) и решим спрямо $\mathrm{d}T$ получаваме

$$\frac{\mathrm{d}^{T_H} V}{\mathrm{d}+^{T_H}} \left(\frac{\gamma}{V}\right) T_H = \frac{1}{2C_V}$$

Това е диференциалното уравнение за температурата T_H върху ударната адиабата на твърдо тяло като функция на обема V . В него фигурират параметъра на Грюнайзен γ и специфичната топлина при постоянен обем C_V . Да въведем безразмерния обем $\varepsilon = 1 - V/V_0$, за γ да използваме общоприетото приближение $(\gamma/V) = (\gamma_0/V_0) = const$. и заместим P_H с неговото равно от [1,ур.(2.9)]. Тогава ур.(6) приема вида

$$\frac{\mathrm{d}^{T_H}\varepsilon}{\mathrm{d}-^{T_H}} \gamma_0 T_H = \frac{c_0^2 s \varepsilon^2}{C_V (1 - s\varepsilon)^3}.$$

Уравнение (7) е едно обикновено линейно нехомогенно диференциално уравнение от първи ред с променливи коефициенти. То може да се реши по метода на Бернули [3]. За T_H получаваме

$$T_H(\varepsilon) = \frac{c_0^2 s}{C_V} e^{\gamma_0 \varepsilon} \int \frac{\varepsilon^2 e^{-\gamma_0 \varepsilon}}{(1 - s\varepsilon)^3} \mathrm{d}\varepsilon + \mathrm{C} e^{\gamma_0 \varepsilon},$$

където C е интеграционната константа, която се определя от началните условия. Интегралът в ур. (8) може донякъде да се упрости чрез интегриране по части:

$$\int \frac{\varepsilon^2 e^{-\gamma_0 \varepsilon}}{(1 - s\varepsilon)^3} \mathrm{d}\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2 e^{-\gamma_0 \varepsilon} [s\varepsilon(\gamma_0 - 4s) - \gamma_0 + 3s]}{2s^4 (1 - s\varepsilon)^2} +$$
$$+ \frac{(\gamma_0^2 - 4\gamma_0 s + 2s^2) \int \frac{e^{-\gamma_0 \varepsilon}}{1 - s\varepsilon} \mathrm{d}\varepsilon}{2s^4}.$$

Интегралът в дясната страна на ур. (9) не се представя в елементарни функции. Той може да се изрази чрез интегралната експоненциална функция $\mathrm{Ei}(x)$, която се пресмята числено, а освен това е изследвана и табулирана.

$$\int \frac{e^{-\gamma_0 \varepsilon}}{1 - s\varepsilon} \mathrm{d}\varepsilon = -\frac{e^{-\gamma_0/s} \mathrm{Ei}(\frac{\gamma_0}{s} - \gamma_0 \varepsilon)}{s}.$$

Окончателно ур. (8) приема вида

$$T_H(\varepsilon) = \frac{c_0^2 s}{C_V} \left[-\frac{s\varepsilon(\gamma_0 - 4s) - \gamma_0 + 3s}{2s^4 (1 - s\varepsilon)^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{e^{\gamma_0 \varepsilon - \frac{\gamma_0}{s}} \left(\gamma_0^2 - 4\gamma_0 s + 2s^2\right) \mathrm{Ei}\left(\frac{\gamma_0}{s} - \gamma_0 \varepsilon\right)}{2s^5} \right] + \mathrm{C} e^{\gamma_0 \varepsilon}.$$

Полученото решение дава допълнителна информация за термодинамичните свойства на материята при високи температури и налягания. Освен това то има и практическа стойност --- може да се използва при оптимизацията на режимите на взривна обработка на материали и при получаване на нови материали в условията на взривно въздействие.

Литература

1. Gospodinov V., *LANL e-print archive*, cond-mat/9911407.
2. Кормер С.Б. и др., *ЖЭТФ*, **48** (1965) с. 1033.
3. Бугров Я.С., С.М. Никольский. *Высшая математика*. М., Наука, 1989, стр. 30.
4. Уолш Д.М.,Р.Г.Мак-Куин и М.Р.Райс, в кн.: *Высокоскоростные ударные явления*. Под ред. проф. В.Н. Николаевского. М., Мир, 1973, гл.7.
5. *Физика взрыва*. Под ред. К.П. Станюковича. М., Наука, 1975.